
Une dérivée fractionnaire à noyau dépendant de l'état : inversion et problèmes bien posés pour l'opérateur DLAM

Yaya Youssouf YAYA

Ecole Normale Supérieure de N'Djamena, Tchad, yy.y@zig.univ.sn.

Les dérivées fractionnaires classiques décrivent la mémoire en convoluant le taux de variation avec un noyau fixé une fois pour toutes : la dérivée de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1)$ pondère tout le passé par $(t - s)^{-\alpha}$, quoi qu'ait fait la trajectoire entre s et t . Les extensions usuelles ne lèvent pas cette rigidité : noyaux non singuliers de Caputo–Fabrizio et d'Atangana–Baleanu, ordre variable $\alpha(t)$, calcul général de Kochubei et Luchko fondé sur les paires de Sonine, toutes prescrivent le noyau a priori. Or la mémoire des systèmes visés, immunité, marchés, synapses, dépend du contexte : un choc en efface une partie, une phase calme la conserve.

Cet exposé présente l'opérateur DLAM (*Derivative with Local Adaptive Memory*),

$$D_t^{\alpha, \mu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\mu(t, s; f)}{(t - s)^\alpha} f'(s) ds, \quad \mu(t, s; f) = \frac{1}{1 + \lambda |f(t) - f(s)|^p},$$

dont le noyau se contracte là où la fonction varie brutalement et retrouve la pondération de Caputo là où elle varie lentement, le cas $\lambda = 0$ redonnant Caputo, au prix de la non-linéarité. L'analyse établit d'abord que l'opérateur est bien défini et borné, avec $|D_t^{\alpha, \mu} f(t)| \leq \|f'\|_\infty t^{1-\alpha}/\Gamma(2 - \alpha)$ pour $f \in C^1$. Le résultat central est un théorème d'inversion sur les espaces de Hölder : pour $g \in C_0^\beta([0, T])$ avec $\beta > 1 - \alpha$, l'équation $D_t^{\alpha, \mu} f = g$ admet une solution unique $f \in C_0^1$, l'inverse $J^{\alpha, \mu}$ étant borné de C^β dans C^1 ; la preuve ramène le problème, via $\varphi = f'$ et $\mu = 1 + \eta$ avec $\eta(t, t) = 0$, à une équation d'Abel généralisée puis à une perturbation de Volterra à noyau continu et de rayon spectral nul. C'est, à notre connaissance, le premier théorème d'inversion pour un noyau dépendant de l'état ; il ouvre la voie au caractère bien posé de la relaxation adaptative $D_t^{\alpha, \mu} u + \beta u = h$ comme du problème de Cauchy $D_t^{\alpha, \mu} u = F(t, u)$, où la dépendance circulaire est traitée par point fixe de Banach.

Un schéma de type L1 à poids adaptatif complète l'étude, avec une convergence en $O(h)$ pour $f \in C^2$. Les expériences confirment les énoncés, de l'identité $J^{\alpha, \mu}(D_t^{\alpha, \mu} f) = f$ à une décroissance quasi exponentielle en transitoire, puis en loi de puissance au calme, inaccessible à un noyau figé. Ce travail est publié au *Journal of Fractional Calculus and Applications* **17**(2) (2026), n° 10. Une application à la volatilité financière et les prolongements envisagés, noyaux asymétriques, cadre multivarié, EDP à mémoire, referment l'exposé.

Mots-clés. Calcul fractionnaire ; mémoire adaptative ; équation d'Abel généralisée ; équations intégrales de Volterra ; espaces de Hölder ; relaxation fractionnaire ; schéma L1.

Classification AMS (2020). 26A33, 45D05, 45E10, 34A08, 65R20.

Références principales

- Y. Y. Yaya, *A new fractional derivative with local adaptive memory: the DLAM operator*, J. Fract. Calc. Appl. **17**(2) (2026), n° 10.
 M. Caputo, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, II*, Geophys. J. R. Astron. Soc. **13** (1967), 529–539.
 A. N. Kochubei, *General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes*, Integral Equations and Operator Theory **71** (2011), 583–600.
 Yu. Luchko, *General fractional integrals and derivatives with the Sonine kernels*, Mathematics **9** (2021), 594.
 S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach, 1993.