
Compatibilité entre structures de Jacobi pseudo-riemanniennes et structures métriques sur le fibré des 1-jets

Abdoulaye Tankary BANAOU

Université Abdou MOUMOUNI, Niger. tankarybanaou@gmail.com

Dans le prolongement des travaux de M. Boucetta sur la compatibilité entre structures de Poisson et structures pseudo-riemanniennes, nous étudions une extension de cette problématique au cadre des structures de Jacobi en nous plaçant sur le fibré des premiers jets J^1M .

Soit (M, π, E, g) une variété de Jacobi pseudo-riemannienne. L'identification naturelle

$$J^1M \simeq T^*M \oplus \mathbb{R}$$

permet de munir le fibré des 1-jets d'une métrique duale définie par $g_1^*((\alpha, f), (\beta, h)) = g^*(\alpha, \beta) + fh$. À partir de la structure de Jacobi et de la métrique donnée, nous introduisons l'endomorphisme

$$J_1^*(\alpha, f) = (J^*\alpha + f\eta, -\alpha(E)),$$

où $J^* = g^\sharp \circ \pi^\sharp$, $\eta = g^\flat(E)$.

L'objectif principal de ce travail est d'établir une relation explicite de compatibilité sur le fibré des 1-jets, caractérisée par la condition

$$D^{J_1}J_1^* = 0,$$

où D^{J_1} désigne la connexion contravariante de Levi-Civita associée à l'algébroïde de Jacobi. Nous montrons que cette condition est équivalente à une identité tensorielle qui généralise la condition de compatibilité poisson-riemannienne de Boucetta. Cette relation fait apparaître trois types de contributions : celles provenant du bivecteur de Jacobi π , celles liées à la variation de l'endomorphisme J^* , ainsi que des termes supplémentaires induits par le champ de Reeb E et par la composante scalaire du fibré J^1M . En particulier, nous obtenons le terme différentiel

$$RJ^*(\alpha, \beta, \gamma) = 2g^*((D_\alpha J^*)\beta, \gamma),$$

ainsi que les corrections associées à $\eta = g^\flat(E)$.

Nous établissons également que cette formulation est compatible avec la poissonisation homogène sur $M \times \mathbb{R}$. L'isomorphisme canonique entre les sections homogènes du fibré cotangent de la poissonisation et les sections de J^1M permet de transporter les structures géométriques et de relier les propriétés de compatibilité dans les deux cadres.

Enfin, nous présentons un exemple explicite issu d'une structure de contact sur $M = \mathbb{R}^3$, définie par

$$\eta = dz + 2x dy - 2y dx.$$

Le champ de Reeb associé est

$$E = \partial_z,$$

et la structure de Jacobi correspondante conduit à une poissonisation homogène explicite sur $M \times \mathbb{R}$. Cet exemple permet d'illustrer concrètement le transport de la structure de Jacobi sur le fibré des 1-jets.

Ce travail fournit ainsi une formulation intrinsèque de la compatibilité entre structures de Jacobi et structures pseudo-riemanniennes dans un cadre fibré, et étend les résultats classiques du cas poissonien au contexte des algébroïdes de Jacobi.