Exposé du mercredi 12.

Titre: Clôture réelle d'un corps ordonné discret, clôture algébrique d'un corps discret, corps non discrets (absence de test d'égalité).
Une approche constructive.

Résumé.
On explique la différence cruciale entre la construction de la clôture réelle d'un corps ordonné discret, et la construction de la clôture algébrique d'un corps discret.

Cette dernière se heurte dès le début au problème de la construction du corps de racines d'un polynôme donné.

Grâce à la méthode dynamique, on peut comprendre constructivement les calculs qui se cachent derrière le théorème classique qui affirme l'existence de ce corps de racines.

Par ailleurs, le corps des nombres réels et celui des nombres complexes ne possèdent pas de test d'égalité, et leur traitement constructif nécessite des méthodes proches de l'analyse numérique.

Exposé du mercredi 19

Titre: La question non tranchée des fondements des mathématiques.

Résumé
Au début du 20ème siècle, les critiques de Poincaré, Brouwer et Hermann Weyl ont ébranlé la confiance naissante en la théorie des ensembles.

La théorie des ensembles est présentée par Dedekind, Cantor et Hilbert comme le fondement enfin rigoureux et inattaquable des mathématiques.

Hilbert a défendu l'Univers ensembliste cantorien. Il a inventé pour cela la métamathématique et la théorie de la démonstration. Ce faisant il a dû se replier sur un programme formaliste qui a en partie échoué (théorème d'incomplétude de Gödel).

Malgré cet échec, la communauté mathématique a accepté le programme formaliste, tout en pensant qu'un Univers cantorien absolu existait bien dans le royaume des idées pures (c'est le point de vue du réalisme platonicien: par exemple "je crois en un seul R").

Le mathématicien multicéphale Bourbaki, inventeur par ailleurs de bien de merveilles mathématiques, a cru pouvoir annoncer la fin de la controverse en disant qu'il n'y aurait désormais qu'une mathématique, La Mathématique, formalisée une fois pour toutes dans ses Éléments.

En 1967, le livre du mathématicien américain Errett Bishop "Foundations of Constructive Analysis" change complètement la donne: il montre en pratique qu'on peut traiter les bases de l'Analyse de manière complètement constructive sans contredire ni les mathématiques classiques, ni celles de Brouwer, ni celles des adeptes des seules machines de Turing.

La "révolution Bishop" a débouché du coté formel sur la théorie constructive des types dépendants de Martin-Löf, puis sur la théorie homotopique des types de Voevodsky.

En pratique, le programme de Bishop: comprendre constructivement tout ce qui se cache de raisonnable dans les mathématiques classiques et développer de nouvelles méthodes acceptables, est plus vivant que jamais.